# 平成 27 年度
# 大阪私立大学大学院理学研究科
# 大学院前期博士課程（修士課程）・数物系専攻
# 学力試験問題（基礎的分野）

## 数学系受験者に対する注意事項

(1) 第 1 志望専門分野が数理構造論 (A1) または数理解析学 (A2) の受験者は, 数学系の基礎的分野の問題を解答して下さい. 数学系の基礎的分野の問題は 1 ページ～2 ページにあります.

(2) 3 題全てに解答して下さい.

(3) 解答用紙は, 6 枚配布します.

(4) 解答は, 問題ごとに用紙を替え, 枠内に記入して下さい. 解答用紙の 全てに, 受験番号, 氏名および問題番号を記入してください. また, 問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい.

(5) 配点は, 各問題とも 50 点です.

(6) 試験時間は 9:30～12:00 です.

## 物理系受験者に対する注意事項

(1) 第 1 志望専門分野が基礎物理学 (A3), 宇宙・高エネルギー物理学 (A4), または物性物理学 (A5) の受験者は, 物理系の基礎的分野の問題を解答して下さい. 物理系の基礎的分野の問題は 3 ページ～6 ページにあります.

(2) 3 題全てに解答して下さい.

(3) 解答用紙は, 6 枚配布します.

(4) 解答は, 問題ごとに用紙を替え, 枠内に記入してください. 解答用紙の 全てに, 受験番号, 氏名および問題番号を記入してください. また, 問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい.

(5) 配点は, 各問題とも 50 点です.

(6) 試験時間は 9:30～12:00 です.

(7) 解答用紙は, 白紙を含め全て提出してください.

# 基礎的分野の問題（数学系）

次の数学 I-1〜数学 I-3 の問題全てに解答せよ.

$\boxed{\text{数学 I-1}}$　$\alpha$ は複素数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ の固有値はすべて 0 であるとする.

このとき次の各問に答えよ.

(1) $\alpha$ の値を求めよ.

(2) $A$ のジョルダン標準形を求めよ.

$\boxed{\text{数学 I-2}}$　次の各問いに答えよ.

(1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ は $f(0) \neq 0$ かつ $f'(0) \neq 0$ をみたすとする. このとき

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) & (x < 0) \end{cases}$$

で定められる関数 $F$ が $C^1(\mathbb{R})$ に属するような定数の組 $(a_1,\ a_2)$ を求めよ.

(2) $f \in C^2(\mathbb{R})$ は $f^{(k)}(0) \neq 0$ $(k = 0,\ 1,\ 2)$ をみたすとする. このとき

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ b_1 f(-x) + b_2 f(-2x) + b_3 f(-3x) & (x < 0) \end{cases}$$

で定められる関数 $F$ が $C^2(\mathbb{R})$ に属するような定数の組 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を求めよ.

(3) $m$ を正の整数とする. $f \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ は $f^{(k)}(0) \neq 0$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$ をみたすとする. このとき

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k f(-kx) & (x < 0) \end{cases}$$

で定められる関数 $F$ が $C^{m-1}(\mathbb{R})$ に属するような定数の組 $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ がただ一つ存在することを示せ.

$\boxed{\text{数学 I-3}}$ $(X,\ d)$ を距離空間, $A$ を $X$ の空でない部分集合とする. このとき次の各問いに答えよ.

(1) $A$ が開集合であること, および $A$ が閉集合であることの定義をそれぞれ述べよ.

(2) $A$ の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $X$ のある点 $a$ に収束しているとする. $A$ が閉集合ならば, $a$ は $A$ の点であることを示せ.

(3) $X$ の点 $x$ に対して, $d_A(x) = \inf\{d(a,\ x) \mid a \in A\}$ と定める. $A$ が閉集合のとき, $d_A(x) = d(a,\ x)$ となる $A$ の点 $a$ は常に存在するか. 存在するならば証明し, 存在しないならばその例を一つ挙げよ.