

平成 28 年度
大阪私立大学大学院理学研究科
大学院前期博士課程（修士課程）・数物系専攻
学力試験問題（基礎的分野）

数学系受験者に対する注意事項

- (1) 第 1 志望専門分野が数理構造論 (A1) または数理解析学 (A2) の受験者は、数学系の基礎的分野の問題を解答して下さい。数学系の基礎的分野の問題は 1 ページ～2 ページにあります。
- (2) 3 題全てに解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6 枚配布します。
- (4) 解答は、問題ごとに用紙を替え、枠内に記入して下さい。解答用紙の 全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入してください。また、問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 配点は、各問題とも 50 点です。
- (6) 試験時間は 9:30～12:00 です。

物理系受験者に対する注意事項

- (1) 第 1 志望専門分野が基礎物理学 (A3)、宇宙・高エネルギー物理学 (A4)、または物性物理学 (A5) の受験者は、物理系の基礎的分野の問題を解答して下さい。物理系の基礎的分野の問題は 3 ページ～6 ページにあります。
- (2) 3 題全てに解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、共通の解答用紙 4 枚と専門の解答用紙 2 枚の計 6 枚を配布します。
- (4) 物理学 I-1、物理学 I-2 については共通の解答用紙を使用し、解答は、問題ごとに用紙を替え、枠内に記入して下さい。一つの問題の解答を複数の解答用紙に記入してもかまいません。物理学 I-3 については、この問題専用の解答用紙を使用して下さい。
- (5) 解答用紙の 全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入してください。また、問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (6) 配点は、各問題とも 50 点です。
- (7) 試験時間は 9:30～12:00 です。
- (8) 解答用紙は、白紙を含め全て提出してください。

基礎的分野の問題（数学系）

次の数学 I-1～数学 I-3 の問題全てに解答せよ.

数学 I-1 $c_1, \dots, c_n$ を複素数とし, n 次複素正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ c_n & \dots & \dots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

により定める. また A の固有多項式を $f(t)$ とする. 次の各問に答えよ.

- (1) $f(t)$ を求めよ.
- (2) α を A の固有値とすると, A の固有値 α に属する固有空間を求めよ.
- (3) $f(t)$ が $f(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \dots (t - \alpha_r)^{m_r}$ と因数分解できるとする. ただし, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は相異なる複素数, $m_1, \dots, m_r$ は正の整数とする. このとき A のジョルダン標準系を求めよ.
- (4) A の最小多項式を求めよ.

数学 I-2 次の各問いに答えよ.

- (1) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束することを, 数列 $a_n = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx$ ($n \in \mathbb{N}$) がコーシー列であることを示すことにより証明せよ.
- (2) 広義積分 $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散することを示せ.
- (3) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ は発散することを示せ.
- (4) 広義積分 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ は収束することを示せ.

数学 I-3 このとき次の各問いに答えよ.

- (1) $I = [0, 1]$ (閉区間), $J = [0, 1)$ (半開区間) とする. I, J には $\mathbb{R}$ の標準的位相 (ユークリッド空間としての位相) の相対位相として定まる部分空間の位相を定める.
- (a) J から I への連続な全射をひとつ定義せよ.
- (b) I から J への連続な全射は存在しないことを示せ.
- (2) X を距離空間とし, d をその距離とする.
- (a) X がハウスドルフ空間であることを示せ.
- (b) X のコンパクト部分集合 K と $x \in X - K$ に対し, X の開集合 U で

$$U \ni x \quad \text{かつ} \quad U \cap K = \emptyset$$

となるものが存在することを示せ.