

平成 28 年度 大阪市立大学 数物系専攻 (数学系) 基礎的分野 解答

数学 I-1

$c_1, \dots, c_n$ を複素数とし, n 次複素正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ c_n & \dots & \dots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

により定める. また A の固有多項式を $f(t)$ とする. 次の各問に答えよ.

- (1) $f(t)$ を求めよ.
- (2) α を A の固有値とすると, A の固有値 α に属する固有空間を求めよ.
- (3) $f(t)$ が $f(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \dots (t - \alpha_r)^{m_r}$ と因数分解できるとする. ただし, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は相異なる複素数, $m_1, \dots, m_r$ は正の整数とする. このとき A のジョルダン標準系を求めよ.
- (4) A の最小多項式を求めよ.

[解答]

(1) $k = 1, \dots, n$ に対し, k 次複素正方行列 $A_k(t)$ を

$$A_k := \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & t & -1 \\ -c_k & \dots & \dots & -c_2 & t - c_1 \end{vmatrix}$$

で定める. $k \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} A_k(t) &= t \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & t & -1 \\ -c_{k-1} & \dots & \dots & -c_2 & t - c_1 \end{vmatrix} + (-1)^{k+1}(-c_k) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t & -1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & t & -1 \end{vmatrix} \\ &= tA_{k-1}(t) + (-1)^{k+1}(-c_k)(-1)^{k-1} = tA_{k-1}(t) - c_k \end{aligned}$$

だから, $k = n, n-1, \dots, 2$ を順に適用して,

$$\begin{aligned} f(t) &= A_n(t) = tA_{n-1}(t) - c_n = t(tA_{n-2}(t) - c_{n-1}) - c_n = t^2A_{n-2}(t) - c_{n-1}t - c_n \\ &= \dots = t^{n-1}A_1(t) - c_2t^{n-2} - \dots - c_{n-1}t - c_n = t^{n-1}(t - c_1) - c_2t^{n-2} - \dots - c_{n-1}t - c_n \\ &= t^n - c_1t^{n-1} - c_2t^{n-2} - \dots - c_{n-1}t - c_n \end{aligned}$$

が得られる. ■

(2) α は A の固有値で, $f(t)$ は A の固有多項式だから,

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^n - c_1\alpha^{n-1} - c_2\alpha^{n-2} - \dots - c_{n-1}\alpha - c_n = 0 \quad (1)$$

をみたすことに注意する. (n, n) 成分から順に第 n 行の成分が 0 になるように行基本変形すると,

$$\begin{aligned} \alpha I - A &= \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & -1 \\ -c_n & \dots & \dots & -c_2 & \alpha - c_1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & -1 \\ -c_n & \dots & \dots & -c_2 + \alpha(\alpha - c_1) & 0 \end{vmatrix} \\ &\longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & -1 \\ f(\alpha) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となるから, A の α に属する固有空間は

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

である. ■

(3) (2) から A の任意の固有値に属する固有空間は $\mathbb{C}$ 上 1 次元である. よって, $f(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \dots (t - \alpha_r)^{m_r}$ と因数分解できるとすると, A の Jordan 標準形は

$$J_{m_1}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus J_{m_r}(\alpha_r) = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\alpha_1) & O & \dots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & J_{m_r}(\alpha_r) \end{bmatrix}$$

である. ■

(4) 代数学の基本定理より, 相異なる $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ と相異なる $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ が存在して, $f(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \dots (t - \alpha_r)^{m_r}$ と因数分解できる. このとき, (3) より Jordan 標準形は $J_{m_1}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus J_{m_r}(\alpha_r)$ だから, 最小多項式は $f(t)$ である. ■

次の各問いに答えよ.

- (1) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束することを, 数列 $a_n = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx$ ($n \in \mathbb{N}$) がコーシー列であることを示すことにより証明せよ.
- (2) 広義積分 $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散することを示せ.
- (3) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ は発散することを示せ.
- (4) 広義積分 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ は収束することを示せ.

[解答]

(1) 任意の n に対し, $\frac{\sin x}{x}$ は $(0, n]$ で連続であり, $x \rightarrow +0$ の極限は $n < \infty$ だから, $\frac{\sin x}{x}$ は $(0, n]$ で有界である. よって, a_n は有限の値を取る.

任意に $\epsilon > 0$ をとる. $m, n \in \mathbb{N}$ が $m > n > 2/\epsilon$ をみたすすると,

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \int_n^m \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| - \int_n^m \frac{(\cos x)'}{x} dx \right| = \left| \left[\frac{\cos x}{x} \right]_n^m - \int_n^m \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos m}{m} \right| + \left| \frac{\cos n}{n} \right| + \left| \int_n^m \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \int_n^m \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \int_n^m \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_n^m = \frac{2}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

となるから, $\mathbb{R}$ 上の列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列, したがって収束列である. よって, 問いの広義積分は収束する. ■

(2), (3) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$ だから,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{(k-\frac{1}{4})\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{(k-\frac{1}{4})\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(k-\frac{1}{4})\pi} dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(k-\frac{1}{4})\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k-\frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty \\ \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{(k-\frac{1}{4})\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{(k-\frac{1}{4})\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k-\frac{1}{4})\pi} dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k-\frac{1}{4})\pi} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k-\frac{1}{4}} \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty \end{aligned}$$

となる. よって, 問いの広義積分は発散する. ■

(4) $\frac{\sin x}{x}$ は $(0, 1]$ で連続であり, $x \rightarrow +0$ の極限は $1 < \infty$ だから, $\frac{\sin x}{x}$ は $(0, 1]$ で有界である. よって,

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \leq \int_0^1 M^2 dx = M^2 < \infty \quad \left(M := \sup_{x \in (0, 1]} \frac{\sin x}{x} < \infty \right)$$

となる. また,

$$\int_1^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1 < \infty$$

となる. よって, 問いの広義積分は収束する. ■

次の各問いに答えよ.

- (1) $I = [0, 1]$ (閉区間), $J = [0, 1)$ (半開区間) とする. I, J には $\mathbb{R}$ の標準的位相 (ユークリッド空間としての位相) の相対位相として定まる部分空間の位相を定める.
- (a) J から I への連続な全射をひとつ定義せよ.
- (b) I から J への連続な全射は存在しないことを示せ.
- (2) X を距離空間とし, d をその距離とする.
- (a) X がハウスドルフ空間であることを示せ.
- (b) X のコンパクト部分集合 K と $x \in X - K$ に対し, X の開集合 U で

$$U \ni x \quad \text{かつ} \quad U \cap K = \emptyset$$

となるものが存在することを示せ.

[解答]

(1)(a) 写像 $f: J \rightarrow I$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \in [0, 1/2]) \\ 1 & (x \in (1/2, 1)) \end{cases}$$

で定めると, f は連続かつ全射である.

実際, $[0, 1/2], (1/2, 1]$ での連続性は明らかであり, $\lim_{x \rightarrow 1/2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2+0} f(x) = f(1/2)$ より $1/2 \in J$ でも連続であるから, f は J 上で連続である. また, 任意の $y \in I$ に対し, $f(y/2) = y$ であるから f は全射である. ■

(1)(b) 背理法により示す. すなわち, 連続な全射 $f: I \rightarrow J$ が存在すると仮定して矛盾を導く.

I はコンパクトで f は連続だから Heine の定理より f は $x \in I$ が存在して, $f(x) \in J$ は f の最大値となる. 一方, $f(x) < 1$ より $\frac{f(x)+1}{2} \in J$ だから $x' \in I$ が存在して $f(x') = \frac{f(x)+1}{2}$ となるが, $f(x) < \frac{f(x)+1}{2}$ であるから x の定め方に矛盾する. よって, 全射 $f: I \rightarrow J$ は存在しない. ■

(2)(a) $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) を任意にとる. このとき,

$$\alpha := d(x_1, x_2), \quad U_1 := \left\{ x \in X \mid d(x, x_1) < \frac{\alpha}{3} \right\}, \quad U_2 := \left\{ x \in X \mid d(x, x_2) < \frac{\alpha}{3} \right\}$$

と定めると, U_1, U_2 はともに開集合で, $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ をみたとす.

実際, (X, d) は距離空間だから U_1, U_2 の定め方からともに開集合である. また, $x_1 \neq x_2$ より $\alpha > 0$ なので $d(x_i, x_i) < \alpha/3$ ($i = 1, 2$) だから, $x_i \in U_i$ ($i = 1, 2$) である. 最後に, $z \in U_1 \cap U_2$ が存在すると仮定すると,

$$\alpha = d(x_1, x_2) \leq d(z, x_1) + d(z, x_2) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

から $\alpha < 0$ となって矛盾するから $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ が従う. よって, 距離 d によって定まる位相を考えたときの位相空間 X は Hausdorff 空間である. ■

(2)(b) Hausdorff 空間は T_1 空間だから, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ と $x \in X - K$ に対し, $X - \{x\}$ は開集合で $x \notin U$ かつ $K \subset U$ が成り立つ. よって, $U = X - \{x\}$ とすれば題意をみたす U となる. ■