

平成 28 年度 基礎科目 I 解答

問 1

線型写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) として定める. V を 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

が張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間としたとき, f の V への制限 $g = f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ. ただし, g の階数とは, $g(V)$ の次元のことである.

[解答]

$a := {}^t[1, 2, -2, -4]$, $b := {}^t[0, -2, 1, 3]$, $c := {}^t[1, 1, 0, -4]$ とおく. 任意の V の元は $xa + yb + zc$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$) と表され, f が線形写像であることから $g(V)$ の任意の元は $af(x) + bf(y) + cf(z)$ と表される. よって, $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ の張る空間が $g(V)$ である.

$$f(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad f(b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$f(c) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

だから,

$$\text{rank}[f(a), f(b), f(c)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -10 & 9 & -7 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

だから, g の階数は 2 である. ■

問 2

a を実数とする. 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (i) 行列 A の固有値を求めよ.
- (ii) 行列 A が対角化可能となる実数 a をすべて求めよ. ただし, A が対角化可能であるとは, 複素正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在することをいう.

[解答]

- (i) I を 3 次単位行列とする. $\alpha := \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}$, $\beta := \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}$ とすると,

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-a & -1 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-a)(x-1)x + 4(x-1) = (x-1)(x^2 - ax + 4) = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

である. よって, A の固有値は $1, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$ である. ■

- (ii) α, β は (i) で定めたものを踏襲する.

[1] $1, \alpha, \beta$ がすべて異なるとき, すなわち

$$\begin{cases} 1 \neq \alpha \\ 1 \neq \beta \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2-a \neq \sqrt{a^2-16} \\ 2-a \neq -\sqrt{a^2-16} \\ a^2-16 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2-a)^2 \neq a^2-16 \\ a^2 \neq 16 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 5 \\ a \neq \pm 4 \end{cases} \iff a \neq 5, \pm 4$$

のとき, A は対角化可能である.

[2] $a = 5 \implies \alpha = 4, \beta = 1$ のとき

$$\text{rank}(I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1-5 & -1 & -2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

だから, 固有値 1 に属する固有空間が 1 である. 一方, 固有値 1 の重複度は 2 だから, A は対角化可能でない.

[2] $a = 4 \implies \alpha = \beta = 2$ のとき

$$\text{rank}(2I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 2-4 & -1 & -2 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

だから, 固有値 2 に属する固有空間が 1 である. 一方, 固有値 2 の重複度は 2 だから, A は対角化可能でない.

[3] $a = -4 \implies \alpha = \beta = -2$ のとき

$$\text{rank}(-2I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} -2-(-4) & -1 & -2 \\ 0 & -2-1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

だから, 固有値 -2 に属する固有空間が 1 である. 一方, 固有値 -2 の重複度は 2 だから, A は対角化可能でない.

以上より, A が対角化可能 $\iff a \neq 5, \pm 4$ である. ■

問 3

次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx$$

ただし, n は自然数とし, $[y]$ は y を超えない最大の整数を表す.

[解答]

$k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に対して $k/n < x \leq (k+1)/n$ なら $[nx] = k$ であることと, e^{-x} が単調減少であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - [nx]) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-k/n} (nx - k) dx = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1/n}}, \\ \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx > \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-(k+1)/n} (nx - k) dx \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)/n} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} \end{aligned}$$

である. Taylor 展開 $e^{-1/n} = 1 - (1/n) + (1/2n^2) + \dots$ により, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1/n}} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + o(1)}, \quad \frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$$

だから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1/n}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} = \frac{1}{2}$$

である. したがって, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx = \frac{1}{2}$ を得る. ■

[別解]

$k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に対して $k/n < x \leq (k+1)/n$ なら $[nx] = k$ であることに注意すると,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - [nx]) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx &= [-e^{-x} (nx - k)]_{k/n}^{(k+1)/n} + \int_{k/n}^{(k+1)/n} ne^{-x} dx = -e^{-(k+1)/n} - [ne^{-x}]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= -e^{-(k+1)/n} - n(e^{-(k+1)/n} - e^{-k/n}) \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx &= - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)/n} - n \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-(k+1)/n} - e^{-k/n}) = - \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} - n \lim_{K \rightarrow \infty} (e^{-(K+1)/n} - e^0) \\ &= - \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} + n = \frac{n - ne^{-1/n} - e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} \end{aligned}$$

である. Taylor 展開 $e^{-1/n} = 1 - (1/n) + (1/2n^2) + \dots$ により, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{n - ne^{-1/n} - e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} = \frac{n - n\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1 - o(1)}{1 + o(1)}$$

だから, 結局 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x} (nx - [nx]) \, dx = \frac{1}{2}$ を得る. ■

問 4

$\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{xy(xy + 4)}{x^2 + y^2 + 1}$$

の最大値および最小値のそれぞれについて, 存在するなら求め, 存在しないならそのことを示せ.

[解答]

(i) 最大値について

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x) = \infty$ であるから最大値は存在しない.

(ii) 最小値について

$f(x, y) = f(-x, -y)$, $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ だから $x > 0$, $y \neq 0$ を調べれば十分.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(2xy^2 + 4y)(x^2 + y^2 + 1) - 2x(xy^2 + 4xy)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2y(xy + 2)(x^2 + y^2 + 1) - 2y(x^3y + 4x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2y(x^3y + xy^3 + xy + 2x^2 + 2y^2 + 2 - x^3y - 4x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2y(xy^3 + xy - 2x^2 + 2y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2x(x^3y + xy + 2x^2 - 2y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

だから, $x, y \neq 0$ で考えていることに注意すると,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} xy^3 + xy - 2x^2 + 2y^2 + 2 = 0 \\ x^3y + xy + 2x^2 - 2y^2 + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy^3 - x^3y - 4x^2 + 4y^2 = 0 \\ xy^3 + x^3y + 2xy + 4 = 0 \end{cases} \dots (*) \\ &\iff \begin{cases} (y + x)(y - x)(xy + 4) = 0 \\ (*) \end{cases} \end{aligned}$$

である.

[1] $y = -x$ のとき

$$(*) \iff -x^4 - x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0 \iff x = 1$$

である. よって, $(1, -1)$ は停留点であり, 他には存在しない.

[2] $y = x$ のとき

$$((*) \text{ 左辺}) = x^4 + x^4 + 2x^2 + 4 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0$$

である. よって, $(*)$ をみたし得ないから停留点は存在しない.

[3] $y = -\frac{4}{x}$ のとき

$$((*) \text{ 左辺}) = -\frac{64}{x^2} - 4x^2 - 8 + 4 = -\frac{64}{x^2} - 4x^2 - 4 < 0$$

である. よって, $(*)$ をみたし得ないから停留点は存在しない.

以上より, f の停留点は $(1, -1)$ に限る. また, $f(1, -1) = -1$ である.

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ で $r \geq 2$ のとき,

$$f(x, y) = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta (r^2 \sin \theta \cos \theta + 4)}{r^2 + 1} = \frac{(r^2 \sin \theta \cos \theta + 2)^2 - 4}{r^2 + 1} \geq -\frac{4}{r^2 + 1} \geq -\frac{4}{5} > -1$$

である. よって, f が $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 2\}$ 上で最小値をとり得ない. $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ はコンパクト集合で f は連続だから, f は境界 $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ 上または D 内部の停留点で最小値をとる. いま, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ 上で $f(x, y) \geq -4/5 > -1$ だったから, f は停留点 $(1, -1)$ で最小値 -1 をとる.

[別解]

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x) = \infty$ であるから最大値は存在しない.

$$f(x, y) = \frac{xy(xy + 4) + x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} - 1 = \frac{(x + y)^2 + (xy + 1)^2}{x^2 + y^2 + 1} - 1$$

であるから $f(x, y) \geq -1$ で, $f(1, -1) = -1$ であるから最小値は -1 ■