

平成 28 年度
大阪市立大学大学院理学研究科
大学院前期博士課程（修士課程）・数物系専攻
筆答試験問題（専門分野）

数学系受験者に対する注意事項

- (1) 第 1 志望専門分野が数理構造論 (A1) または数理解析学 (A2) の受験者は、数学系の専門分野の問題を解答して下さい。数学系の専門分野の問題は 1 ページ～5 ページにあります。
- (2) 数学 II-1～数学 II-12 の問題の中から 3 題を選択して解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6 枚配布します。
- (4) 解答は、問題ごとに用紙を替え、枠内に記入して下さい。解答用紙の 全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入してください。また、問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 配点は、各問題とも 50 点です。
- (6) 試験時間は 13:00～15:30 です。

物理系受験者に対する注意事項

- (1) 第 1 志望専門分野が基礎物理学 (A3)、宇宙・高エネルギー物理学 (A4)、または物性物理学 (A5) の受験者は、物理系の専門分野の問題を解答して下さい。物理系の専門分野の問題は 6 ページ～10 ページにあります。
- (2) 3 題全てに解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、共通の解答用紙 5 枚と専門の解答用紙 1 枚の計 6 枚を配布します。
- (4) 物理学 II-1、物理学 II-2 については共通の解答用紙を使用し、解答は、問題ごとに用紙を替え、枠内に記入して下さい。一つの問題の解答を複数の解答用紙に記入してもかまいません。物理学 II-3 については、この問題専用の解答用紙を使用して下さい。
- (5) 解答用紙の 全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入してください。また、問題ごとに 何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (6) 配点は、各問題とも 50 点です。
- (7) 試験時間は 13:00～15:30 です。
- (8) 解答用紙は、白紙を含め全て提出してください。

専門分野の問題（数学系）

次の数学 II-1～数学 II-12 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ (4 題以上解答しないこと). 解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ.

数学 II-1 n を 2 以上の整数とし, G を n 次巡回群とする. a を G の生成元とする. 複素数を成分とする 2 次正則行列全体のなす群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ として, 群準同型 $f: G \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(a)$ の位数は n の約数であることを示せ.
- (2) $f(a)$ は対角化可能であることを示せ.
- (3) (2) により, $f(a)$ は適当な $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の元 P を用いて

$$f(a) = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$$

と表される. λ, μ はどのような数であるか論ぜよ.

数学 II-2 p を素数, $\mathbb{F}_p$ を p 個の元から成る有限体とする. $\mathbb{F}_p$ 上の p 次多項式 $f(x) = x^p - x - 1$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ は $\mathbb{F}_p$ に根を持たないことを示せ.
- (2) α を $\mathbb{F}_p$ の拡大体における $f(x)$ の根とする. $s \in \mathbb{F}_p$ とすると, $\alpha + s$ も $f(x)$ の根であることを示せ.
- (3) $f(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上既約であるかどうか論ぜよ.

数学 II-3 R を可換環とする. R 加群 M が既約 R 部分加群 I_1 と I_2 の直和になっているとする. ただし, M の $\{0\}$ でない R 部分加群 I について, I に含まれる R 部分加群が I 自身と $\{0\}$ しかないときに, I を M の既約 R 部分加群という. M の $\{0\}$ でない R 部分加群 X について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $X \cap I_1 \neq \{0\}$ のとき, X は I_1 か M に一致することを示せ.
- (2) $X \cap I_1 = \{0\}$ のとき, M は I_1 と X の直和になることを示せ.
- (3) I_1 と I_2 が R 加群として同型でないとき, M の R 部分加群は, $\{0\}$, I_1 , I_2 , M のいずれかであることを示せ.

数学 II-4 次の 2 次元の単体複体を考える.

$$K = \{|a_1 a_2 a_3|, |a_1 a_2|, |a_2 a_3|, |a_3 a_4|, |a_4 a_1|, |a_1 a_3|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|\}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) オイラー標数 $\chi(K)$ を求めよ.
- (2) 整係数ホモロジー群 $H_d(K)$ を求めよ.
- (3) 球面から異なる 2 点を取り除いた図形を X とする. K が定める多面体 $|K|$ と X は同相でないことを示せ.

数学 II-5 位相空間 X とその部分集合 A に対して, 次のような同値関係を定める: $x, y \in X$ に対し

$$x \sim y \iff x = y \text{ または } \{x, y\} \subset A$$

この同値関係による X の商集合 X/A に, 全射 $p: X \rightarrow X/A$ が連続となるような最も強い位相 (商位相) を入れる. 以下の問いに答えよ.

- (1) X/A の商位相を定める開集合族はどのように与えられるか述べ, それが位相の 3 つの条件を満たすことを示せ.
- (2) 2 つの円周 S_1, S_2 , および, 異なる 2 点 $P, Q \in S_1$ を考える. このとき, 次の 3 つの空間 X, Y, Z が互いに同相でないことを示せ.

$$X = S_1 \times S_2, \quad Y = (S_1 \times S_2)/(\{P\} \times S_2), \quad Z = (S_1/\{P, Q\}) \times S_2$$

数学 II-6 平面 $\mathbb{R}^2$ から空間 $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 \ni (u, v) &\longmapsto \phi(u, v) \in \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v) &= (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v) \end{aligned}$$

によって曲面 S を定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 曲面 S の φ に関する第 1 基本量 E, F, G を計算せよ.
- (2) 曲面 S の φ に関する第 2 基本量 L, M, N を計算せよ.
- (3) 曲面 S のガウス曲率 K , 平均曲率 H , 主曲率 κ_1, κ_2 を計算せよ.
- (4) $\mathbb{R}^2$ の領域 $D = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}$ でパラメータ付けされる曲面 S の部分 $\varphi(D)$ の面積を求めよ. さらにその概形を描け.

数学 II-7 実数 c に対し,

$$M_c = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = cx_3^2 + 1 \right\}$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) M_c は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体となることを示せ.
- (2) c_1 と c_2 が異符号のとき, M_{c_1} と M_{c_2} は微分同相でないことを示せ.
- (3) M_c が M_0 と微分同相となるための c に関する条件を求めよ.

数学 II-8 $p > 1$ とする. 区間 $[0, 1]$ 上の連続関数の集合 W_p を

$$W_p = \left\{ u \in C([0, 1]) \cap C^1((0, 1)) \mid \begin{array}{l} u \text{ は非負値で } u(0) = 0, \\ |u'(t)|^p \text{ および } \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p \text{ は } [0, 1] \text{ 上で積分可能} \end{array} \right\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の $u \in W_p$ に対して

$$\int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt = \frac{(u(1))^p}{1-p} - \frac{p}{1-p} \int_0^1 t^{1-p} (u(t))^{p-1} u'(t) dt$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 任意の $u \in W_p$ に対して不等式

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt \leq \int_0^1 |u'(t)|^p dt$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 等式

$$\inf \left\{ \frac{\int_0^1 |u'(t)|^p dt}{\int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt} \mid u \in W_p, u \not\equiv 0 \right\} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$$

が成り立つことを示せ.

数学 II-9 $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $z^4 = -1$ を満たす複素数を全て求めよ.
- (2) R を 1 より大きい実数とする. 複素平面上で, $z = R$ から原点を中心として反時計回りに円周上を $z = -R$ まで進んでできる半円を C_R , $z = -R$ から実数上を $z = R$ まで進んでできる線分を I_R とおく. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_{C_R + I_R} f(z) dz$$

- (3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ であることを示せ.

- (4) 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ の値を求めよ.

数学 II-10 数列空間

$$l^2 = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \mid a_k \in \mathbb{R}, \|a\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right\}^{1/2} < \infty \right\}$$

の元 $a^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下で定める.

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots),$$

$$a_k^{(n)} = \frac{1}{1 + |n - k|} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 任意の $a, b \in l^2$ に対して $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ とおく. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|a^{(n)}\| < \infty$ を示せ.
- (2) $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^{(n)}\| > 0$ を示せ.
- (3) 任意の $b \in l^2$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a^{(n)}, b \rangle = 0$ となることを示せ.

数学 II-11 以下の各問いに答えよ.

- (1) 区間 $[0, 1]$ 上の実数値可積分関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が全ての n について非負であり, かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

をみたすとする. このとき, ほとんどすべての $x \in [0, 1]$ に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

となることを示せ.

- (2) 区間 $[0, 1]$ 上の実数値可積分関数列 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次で定義する:

$n \in \mathbb{N}$ が $n = 2^k + j$ ($j = 0, 1, \dots, 2^k - 1; k = 0, 1, 2, \dots$) と表されるとき,

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \left(\frac{j}{2^k} \leq x < \frac{j+1}{2^k} \text{ のとき} \right) \\ 0 & (x \in [0, 1] \text{ が上記以外のとき}) \end{cases}$$

このとき, 関数列 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = 0$ となることを示せ.

- (3) (2) の関数列 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について, どのような $0 < x < 1$ に対しても $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ は存在しないことを示せ.

数学 II-12 X は正値確率変数とし, $S(x) = \mathbb{P}(X > x)$ とおく. α は正の定数として,

$$\frac{d}{dx} \log S(x) = -\alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0$$

をみたすとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) X の確率密度関数を求めよ.

- (2) $\alpha = 2$ のとき, X の期待値と分散を求めよ. 必要なら, ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} x^{-t} dt$ について, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ であることを用いよ.

- (3) U は $(0, 1)$ 上の一様乱数, すなわち, 区間 $(0, 1)$ の定義関数を確率密度関数とする確率変数であるとする. このとき

$$Y = \left(\log \frac{1}{1-U} \right)^{1/\alpha}$$

は X と同分布であることを示せ.