平成 26 年度 基礎科目 II 解答

注意

(i) 解答作成には万全を期していますが，論理の飛躍，穴があることは有り得ます．

(ii) 当 PDF はこの著者に著作権があります．

(iii) 無断複製，無断転載は一切禁止します．これらの行為が認められた場合は，止むを得ず法的手段に出ることがあります．

平成 26 年度 基礎科目 II 第 1 問

実数値関数 $f(x)$ は $[0,\infty)$ で連続で，$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^\infty f(x)e^{-x}x^n\ dx=1$$

であることを証明せよ．

[解答]

繰り返し部分積分を行うことにより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int e^{-x}x^n\,dx &= -\frac{e^{-x}x^n}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\int e^{-x}x^{n-1}\,dx = -\frac{e^{-x}x^n}{n!}-\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\int e^{-x}x^{n-2}\,dx\\ &=\cdots=-\frac{e^{-x}x^n}{n!}-\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}-\cdots-\frac{e^{-x}x}{1!}+\frac{1}{0!}\int e^{-x}\,dx\\ &=-\frac{e^{-x}x^n}{n!}-\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}-\cdots-\frac{e^{-x}x}{1!}-\frac{e^{-x}}{0!}=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

が分かる．ただし，$0^0=1$ とする．

ここで，任意に $\epsilon>0$ をとる．$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ より，

$$^{\exists}R>0\ \ s.t.\ \ [x>R \Longrightarrow |f(x)-1|<\epsilon]$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_R^\infty f(x)e^{-x}x^n\,dx &< (1+\epsilon)\left[-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right]_R^\infty=(1+\epsilon)e^{-R}\sum_{k=0}^{n}\frac{R^k}{k!}\xrightarrow{n\to\infty}(1+\epsilon)e^{-R}e^{R}=1+\epsilon,\\ \frac{1}{n!}\int_R^\infty f(x)e^{-x}x^n\,dx &> (1-\epsilon)\left[-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right]_R^\infty=(1-\epsilon)e^{-R}\sum_{k=0}^{n}\frac{R^k}{k!}\xrightarrow{n\to\infty}(1-\epsilon)e^{-R}e^{R}=1-\epsilon\end{aligned}$$

なので，ϵ の任意性より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_R^\infty f(x)e^{-x}x^n\ dx=1$$

が従う．

また，f はコンパクト集合 $[0,R]$ で連続だから，$M:=\max_{x\in[0,R]}|f(x)|$ が存在するので，

$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^R f(x)e^{-x}x^n\,dx\right|\le\frac{M}{n!}\int_0^R e^{-x}x^n\,dx=M\left(-e^{-R}\sum_{k=0}^{n}\frac{R^k}{k!}+1\right)\xrightarrow{n\to\infty}M\left(-e^{-R}e^{R}+1\right)=0$$

だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^R f(x)e^{-x}x^n\,dx=0$$

が従う．

以上より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^\infty f(x)e^{-x}x^n\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^R f(x)e^{-x}x^n\,dx+\frac{1}{n!}\int_R^\infty f(x)e^{-x}x^n\,dx\right)=1$$

が従う．∎

平成 26 年度 基礎科目 II 第 2 問

n, m を正の整数とする．x を変数とする n 次以下の $\mathbb{C}$ 係数多項式の全体を V_n とし，和，差，スカラー倍により V_n を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．m 個の複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ に対し，線形写像 $F : V_n \to \mathbb{C}^m$ を $F(f) = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m))$ で定める．このとき，

(i) F が単射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ のみを用いて述べよ．

(ii) F が全射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ のみを用いて述べよ．

[解答]

(i)　$r := \#\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ の等しいものを全てまとめて $\beta_1, \ldots, \beta_r$ とする．

F は線形だから，F が単射であることと，$\mathrm{Ker}F = \{0\}$ であることが同値であることに注意する．

もし $n \geq r$ なら，$f(x) = (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_r) \in V_n \setminus \{0\}$ は $F(f) = 0$ をみたすから $\mathrm{Ker}F \neq \{0\}$ でない．よって，F が単射なら $n < r$ であることが必要．逆に $n < r$ とすると，代数学の基本定理より，$f(x) \in V_1 \setminus \{0\}$ なら $\beta_1, \ldots, \beta_r$ のいずれかを根にもたないので，$F(f) \neq (0, \ldots, 0)$ である．よって，$\mathrm{Ker}F = \{0\}$ となり，F は単射．

以上より，

$$F \text{ は単射} \iff n < \#\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\}$$

である．∎

(ii)　F が全射であることと，任意の $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して連立方程式

$$\begin{cases} a_n{\alpha_1}^n + a_{n-1}{\alpha_1}^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_1 + a_0 = \gamma_1 \\ a_n{\alpha_2}^n + a_{n-1}{\alpha_2}^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_2 + a_0 = \gamma_2 \\ \qquad\vdots \\ a_n{\alpha_m}^n + a_{n-1}{\alpha_m}^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_m + a_0 = \gamma_m \end{cases} \tag{1}$$

の解 $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in \mathbb{C}^m$ が存在することは同値である．さらにこのことは，任意の $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} {\alpha_1}^n & {\alpha_1}^{n-1} & \ldots & \alpha_1 & 1 \\ {\alpha_2}^n & {\alpha_2}^{n-1} & \ldots & \alpha_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {\alpha_m}^n & {\alpha_m}^{n-1} & \ldots & \alpha_m & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} {\alpha_1}^n & {\alpha_1}^{n-1} & \ldots & \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ {\alpha_2}^n & {\alpha_2}^{n-1} & \ldots & \alpha_2 & 1 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\alpha_m}^n & {\alpha_m}^{n-1} & \ldots & \alpha_m & 1 & \gamma_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

が成り立つことと同値である．

もし $m > \#\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ なら，$\alpha_i = \alpha_j, i < j$ なる $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ が存在するから，任意の $f \in V_n$ に対し，$F(f) = (\ldots, f(\alpha_i), \ldots, f(\alpha_j), \ldots)$ は第 i 成分と第 j 成分が等しいから全射になりえない．よって，F が全射なら $m = \#\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ であることが必要．

もし $n < m - 1$ なら，$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 1$ のとき，((2) の左辺) $\geq n + 1 < m =$ ((2) の右辺) だから全射になりえない．よって，F が全射なら $n \geq m - 1$ であることが必要．

逆に $m = \#\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ かつ $n \geq m - 1$ とすると，任意の $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^m$ に対し，

$$\begin{aligned} g(x) = &\frac{\gamma_1(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_m)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_m)} + \frac{\gamma_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_m)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_m)} \\ &+ \frac{\gamma_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \ldots (\alpha_3 - \alpha_m)} + \cdots + \frac{\gamma_m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{m-1})}{(\alpha_m - \alpha_1)(\alpha_m - \alpha_3) \ldots (\alpha_m - \alpha_{m-1})} \end{aligned}$$

は V_n の元で $F(g) = (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_m)$ をみたす．よって，F は全射である．

以上より，

$$F \text{ は全射} \iff m = \#\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \ \wedge\ n \geq m - 1$$

である．∎

平成 26 年度 基礎科目 II 第 3 問

L_R $(R>0)$ は複素平面において $-R+2i$ を始点，$R+2i$ を終点とする線分を表す．このとき

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,dz$$

の値を求めよ．

[解答]

$L_R=\{z\in\mathbb{C}\mid z=x+2i, x\in[-R,R]\}$ である．$R>2$ で考えれば十分．

$$\begin{aligned}
&C_R:=\{z\in\mathbb{C}\mid z=R+(2-y)i, y\in[0,2]\}, L:=\{z\in\mathbb{C}\mid z=-x, x\in[-R,R]\},\\
&C_{-R}:=\{z\in\mathbb{C}\mid z=-R+yi, y\in[0,2]\}, C:=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right\},\\
&\Gamma:=L_R\cup C_R\cup L\cup C_{-R}, \Delta:=C\cup L, f(z):=\frac{e^{iz}}{z^2+1}
\end{aligned}$$

と定める．Γ,Δ をそれぞれ図 1, 図 2 に示した：

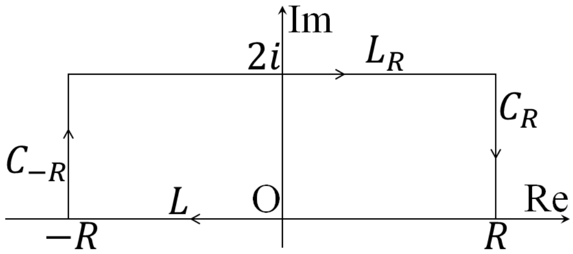

図 1

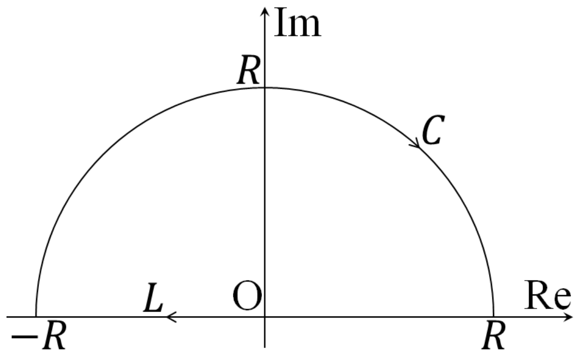

図 2

f は Γ,Δ 上で連続だから，

$$\begin{aligned}
\int_{L_R}f(z)\,dz&=\int_{L_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,dz+i\int_{L_R}\frac{\sin z}{z^2+1}\,dz,\\
\int_{C_{-R}}f(z)\,dz+\int_{C_{-R}}f(z)\,dz&=\int_0^2\frac{e^{i(R+yi)}}{(R+yi)^2+1}\,idy+\int_0^2\frac{e^{i(R+(2-y)i)}}{(R+(2-y)i)^2+1}\,(-idy)\\
&=\int_0^2\frac{e^{i(R+yi)}}{(R+yi)^2+1}\,idy+\int_2^0\frac{e^{i(R+yi)}}{(R+yi)^2+1}\,idy=0 \qquad (\text{第 2 項で y を 2-y に変数変換}),\\
\left|\int_C f(z)\,dz\right|&=\left|\int_0^\pi\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,\left(iRe^{i\theta}dz\right)\right|\le\int_0^\pi\frac{Re^{-R\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|}\,dz\le\int_0^\pi\frac{R}{R^2-1}\,dz\\
&=\frac{\pi R}{R^2-1}\to 0\ \ (R\to\infty)\qquad\left(\therefore\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)\,dz=0\right)
\end{aligned}$$

である．f は Γ,Δ 上および $z=i$ を除く Γ,Δ の内部で正則で，$z=i$ は f の 1 位の極である．Γ,Δ はその定め方からともに負の向きが定まる (向きが等しい) から，

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_\Delta f(z)\,dz$$

が従う．以上より，

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)\,dz&=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\int_{L_R}f(z)\,dz\right)=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left\{\left(\int_\Gamma-\int_{C_R}-\int_L-\int_{C_{-R}}\right)f(z)\,dz\right\}\\
&=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left\{\left(\int_\Gamma-\left(\int_\Delta-\int_C\right)\right)f(z)\,dz\right\}=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma f(z)\,dz-\int_\Delta f(z)\,dz\right)=0
\end{aligned}$$

を得る．∎

平成 **26** 年度 基礎科目 **II** 第 **4** 問

群 $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の指数 3 の部分群の個数を求めよ．

[解答]

$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．

G の指数 3 の部分群を H とする．G は可換なので $H \triangleleft G$ であるから，G/H は剰余群である．$|G/H| = 3$ は素数なので，$G/H \cong \mathbb{Z}_3$ であるから，$g \in G$ ならば $3g + H = 3(g + H) = H$ なので $3g \in H$ となる．よって，$3G := \{3g \in G \mid g \in G\} \subset H$ を得る．

$(G/3G)/(H/3G) \cong G/H$ なので，G の指数 3 の部分群と，$G/3G$ の指数 3 の部分群は全単射に対応する．自然な準同型 $\phi : G \to \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi &= \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \\ \mathrm{Ker}\phi &= \mathbb{Z}_4 \times \{0, 3\} \times \{0, 3, 6\} = 3G \end{aligned}$$

をみたすから，準同型定理により $G/3G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ である．よって，$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の指数 3 の部分群の個数を求めればよい．

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の指数 3 の部分群の位数は $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3| / 3 = 3$ である．また，素因数分解 $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3| = 3^2$ により，$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の任意の真部分群の位数は 3 であるから，$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の真部分群の数を求めれば良い．

任意の $x \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して $2x \neq (0, 0), 3x = (0, 0)$ であるから，x により生成される群 $\langle x \rangle$ は位数 3 の部分群となる．3 は素数なので $\langle x \rangle$ は巡回群である．$\langle x \rangle = \{(0, 0), x, 2x\}$ なので，$\langle x \rangle = \langle y \rangle$ となる $y \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{(0, 0)\}$ は 2 個存在する．したがって，求める個数は

$$\frac{|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{(0, 0)\}|}{2} = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$$

である．▮

平成 **26** 年度 基礎科目 **II** 第 **5** 問

$f : S^2 \to S^1$ を C^∞ 級写像とする．ただし，S_n は n 次元球面

$$\left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

を表す．このとき，S^2 上の少なくとも 2 点において f の微分は零写像になることを示せ．

[解答]

被覆空間 $p : \mathbb{R} \to S^1; x \longmapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ は $\mathbb{R}$ が単連結だから普遍被覆である．また，S^2 は単連結だから f の持ち上げ $\tilde{f} : S^2 \to \mathbb{R}$ が存在する．$p : \mathbb{R} \to S^1$ は被覆空間で C^∞ 級，f はもとより C^∞ 級だから $\tilde{f}$ は可微分写像である．

$\tilde{f}$ は連続で S^2 はコンパクトだから，$\tilde{f}(S^2)$ は最大値 M，最小値 m をもつ．$a \in \tilde{f}^{-1}(M), b \in \tilde{f}^{-1}(m)$ をとる．$a \in S^2$ の座標近傍 $(U, \phi), (u, v) \in U$ をとり，$(u_0, v_0) := \phi(a) \in \phi(U) \subset \mathbb{R}$ とすると，$M = \left(\tilde{f} \circ \phi^{-1}\right)(u_0, v_0)$ が最大値だから，$\tilde{f} \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ の微分可能性より，

$$\frac{\partial\left(\tilde{f} \circ \phi^{-1}\right)}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial\left(\tilde{f} \circ \phi^{-1}\right)}{\partial v}(u_0, v_0) = 0$$

である．よって，$\tilde{f}$ の $a \in S^2$ でのヤコビ行列は

$$\left(J\tilde{f}\right)_a = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(a), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(a)\right] = \left[\frac{\partial\left(\tilde{f} \circ \phi^{-1}\right)}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\left(\tilde{f} \circ \phi^{-1}\right)}{\partial v}(u_0, v_0)\right] = [0, 0]$$

である．$b \in S^2$ でも同様にして，$\left(J\tilde{f}\right)_b = [0, 0]$ である．

いま，$f = p \circ \tilde{f}$ であるから，f の $a, b \in S^2$ でのヤコビ行列は

$$(Jf)_a = (Jp)_{\tilde{f}(a)} (J\tilde{f})_a = 0, (Jf)_b = (Jp)_{\tilde{f}(b)} (J\tilde{f})_b = 0$$

となって，S^2 上の少なくとも 2 点において f の微分は零写像になる．∎