

平成 26 年度 基礎科目 I 解答

注意

- (i) 解答作成には万全を期していますが、論理の飛躍、穴があることは有り得ます。
- (ii) 当 PDF はこの著者に著作権があります。
- (iii) 無断複製、無断転載は一切禁止します。これらの行為が認められた場合は、止むを得ず法的手段に出ることがあります。

平成 26 年度 基礎科目 I 第 1 問

- (i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で、任意の正整数 k について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$$

をみたすとする。このとき、この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するか？理由をつけて答えよ。

- (ii) 次の広義積分は収束するか？理由をつけて答えよ：

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx.$$

[解答]

- (i) 収束しない例が存在する。実際、 $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \log n$ とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n+k}{n} \right) = \log 1 = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \infty \end{aligned}$$

となる。■

- (ii) Taylor 展開により、各 $x \geq 1$ に対して

$$e^{-1/x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} - \frac{1}{3!x^3} + \dots$$

$$(1) \quad \therefore 1 - e^{-1/x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} - \dots$$

である。 $x \geq 1$ なら (1) の右辺は交項級数だから、

$$1 - e^{-1/x} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2!x^2}$$

である。よって、

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx = \int_1^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx \geq \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2!x^2} \right) dx = \left[\log x + \frac{1}{2x} \right]_1^{\infty} = \infty$$

であるから、 $\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx$ は発散する。■

n は 2 以上の整数とする. $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = x^{2n} + y^{2n} - nx^2 + 2nxy - ny^2$$

について次の問に答えよ:

- (i) f の最大値・最小値は存在するか? 理由をつけて答えよ.
 (ii) f が極大値・極小値をとる点をすべて求めよ.

[解答]

- (i) 極座標変換 $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$ により,

$$f(x, y) = r^{2n} (\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta) + nr^2 (\sin 2\theta - 1) \geq r^{2n} (\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta) - 2nr^2$$

である. $\sin \theta, \cos \theta$ は同時に 0 にならないから $\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta > 0$ で, コンパクト集合 $[0, 2\pi]$ 上で連続だから $M := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} (\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta) > 0$ が存在する. よって,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(x, y) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} (Mr^{2n} - 2nr^2) = \infty$$

となる. よって, f の最大値は存在しない. また, θ によらない定数 $R > 0$ が存在して $r \geq R$ で $f(x, y) \geq 1$ をみたすことも分かる. コンパクト集合 $D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上で f は連続だから, f は D_R 上で最小値をもつ. $f(0, 0) = 0 < 1$ なので $\mathbb{R}^2$ 上で f の最小値は存在する. ■

- (ii) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で f が極値をもつためには

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2na^{2n-1} - 2na + 2nb = 0 \\ 2nb^{2n-1} - 2nb + 2na = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^{2n-1} - a + b = 0 \\ b^{2n-1} - b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^{2n-1} + b^{2n-1} = 0 \\ b^{2n-1} - b + a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -b \\ b^{2n-1} - b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ b^{2n-1} - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ b(b^{2n-2} - 2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であることが必要である. すなわち, $(a, b) = (0, 0), (\pm 2^{1/(2n-2)}, \mp 2^{1/(2n-2)})$ (複合同順) であることが必要である. $x \neq 0$ なら

$$f(x, 0) = x^{2n} - nx^2 = x^2 (x^{2n-2} - n) < x^2 (1 - n) < 0, \quad f(x, x) = 2x^{2n} > 0$$

だから, $(0, 0)$ は極値をとらない.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{a=-b=\pm 2^{1/(2n-2)}} &= \begin{vmatrix} 2n(2n-1)a^{2n-2} - 2n & 2n \\ 2n & 2n(2n-1)b^{2n-2} - 2n \end{vmatrix}_{a=-b=\pm 2^{1/(2n-2)}} \\ &= \begin{vmatrix} 4n(2n-1) - 2n & 2n \\ 2n & 4n(2n-1) - 2n \end{vmatrix} = 4n^2 \begin{vmatrix} 2(2n-1) - 1 & 1 \\ 1 & 2(2n-1) - 1 \end{vmatrix} = 4n^2 \begin{vmatrix} 4n-3 & 1 \\ 1 & 4n-3 \end{vmatrix} \\ &= 4n^2(4n-4)(4n-2) > 0, \\ f_{xx}(\pm 2^{1/(2n-2)}, \mp 2^{1/(2n-2)}) &= 4n(2n-1) - 2n = 2n(4n-3) > 0 \end{aligned}$$

だから, $(\pm 2^{1/(2n-2)}, \mp 2^{1/(2n-2)})$ はともに極小値をとる.

以上より極小値をとる点は $(\pm 2^{1/(2n-2)}, \mp 2^{1/(2n-2)})$ であり, 極大値をとる点は存在しない. ■

次の 4 次実正方行列 A, B は正則か？正則ならば逆行列を求め、正則でないならば階数を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[解答]

(i) 行基本変形により,

$$\begin{aligned} & [A, E] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だから, A は正則で逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/4 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり, B は正則でなく階数は 3 である. ■

3 次の複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

に対して、 A と B が相似となるような複素数 x をすべて求めよ。ただし、行列 A と B が相似とは、複素正則行列 P で $A = P^{-1}BP$ をみたすものが存在することをいう。

[解答]

$$\begin{aligned} |tI - A| &= \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 1 \\ 2 & t-1 & -1 \\ -2 & 0 & t \end{vmatrix} = \{(t-3)(t-1)t + 0 + 0\} - \{-2(t-1) + 0 + 0\} = (t-1)(t^2 - 3t + 2) \\ &= (t-1)^2(t-2) \end{aligned}$$

で、行基本変形により、

$$|I - A| = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

だから、 A は対角成分が $1, 1, 2$ である行列に対角化可能である。一方、

$$|tI - B| = \begin{vmatrix} t-1 & -x & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -x & t-2 \end{vmatrix} = \{(t-1)^2(t-2) + 0 + 0\} - \{0 + 0 + 0\} = (t-1)^2(t-2)$$

で、行基本変形により

$$|I - B| = \begin{bmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

だから、 $x = 0$ のとき B は対角成分が $1, 1, 2$ である行列に対角化可能で、 $x \neq 0$ のとき B は対角化可能でない。 A, B が相似であることと、 A, B の Jordan 標準形が一致することは同値だから、 $x = 0$ のときに A, B が相似となり、 $x \neq 0$ のときは A, B は相似とならない。■