平成 28 年度
大阪市立大学大学院理学研究科
大学院前期博士課程（修士課程）・数物系専攻
筆答試験問題（専門分野）

数学系受験者に対する注意事項

(1) 第 1 志望専門分野が数理構造論 (A1) または数理解析学 (A2) の受験者は，数学系の専門分野の問題を解答して下さい．数学系の専門分野の問題は 1 ページ〜5 ページにあります．

(2) 数学 II-1〜数学 II-12 の問題の中から 3 題を選択して解答して下さい．

(3) 解答用紙は，6 枚配布します．

(4) 解答は，問題ごとに用紙を替え，枠内に記入して下さい．解答用紙の全てに，受験番号，氏名および問題番号を記入してください．また，問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい．

(5) 配点は，各問題とも 50 点です．

(6) 試験時間は 13:00〜15:30 です．

物理系受験者に対する注意事項

(1) 第 1 志望専門分野が基礎物理学 (A3)，宇宙・高エネルギー物理学 (A4)，または物性物理学 (A5) の受験者は，物理系の専門分野の問題を解答して下さい．物理系の専門分野の問題は 6 ページ〜10 ページにあります．

(2) 3 題全てに解答して下さい．

(3) 解答用紙は，共通の解答用紙 5 枚と専門の解答用紙 1 枚の計 6 枚を配布します．

(4) 物理学 II-1，物理学 II-2 については共通の解答用紙を使用し，解答は，問題ごとに用紙を替え，枠内に記入して下さい．一つの問題の解答を複数の解答用紙に記入してもかまいません．物理学 II-3 については，この問題専用の解答用紙を使用して下さい．

(5) 解答用紙の全てに，受験番号，氏名および問題番号を記入してください．また，問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい．

(6) 配点は，各問題とも 50 点です．

(7) 試験時間は 13:00〜15:30 です．

(8) 解答用紙は，白紙を含め全て提出してください．

専門分野の問題（数学系）

次の数学 II-1〜数学 II-12 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ (4 題以上解答しないこと)．解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

数学 II-1　n を 2 以上の整数とし，G を n 次巡回群とする．a を G の生成元とする．複素数を成分とする 2 次正則行列全体のなす群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ として，群準同型 $f : G \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(a)$ の位数は n の約数であることを示せ．
(2) $f(a)$ は対角化可能であることを示せ．
(3) (2) により，$f(a)$ は適当な $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の元 P を用いて

$$f(a) = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P$$

と表される．λ, μ はどのような数であるか論ぜよ．

数学 II-2　p を素数，$\mathbb{F}_p$ を p 個の元から成る有限体とする．$\mathbb{F}_p$ 上の p 次多項式 $f(x) = x^p - x - 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $\mathbb{F}_p$ に根を持たないことを示せ．
(2) α を $\mathbb{F}_p$ の拡大体における $f(x)$ の根とする．$s \in \mathbb{F}_p$ とすると，$\alpha + s$ も $f(x)$ の根であることを示せ．
(3) $f(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上既約であるかどうか論ぜよ．

数学 II-3　R を可換環とする．R 加群 M が既約 R 部分加群 I_1 と I_2 の直和になっているとする．ただし，M の $\{0\}$ でない R 部分加群 I について，I に含まれる R 部分加群が I 自身と $\{0\}$ しかないときに，I を M の既約 R 部分加群という．M の $\{0\}$ でない R 部分加群 X について，以下の問いに答えよ．

(1) $X \cap I_1 \neq \{0\}$ のとき，X は I_1 か M に一致することを示せ．
(2) $X \cap I_1 = \{0\}$ のとき，M は I_1 と X の直和になることを示せ．
(3) I_1 と I_2 が R 加群として同型でないとき，M の R 部分加群は，$\{0\}$, I_1, I_2, M のいずれかであることを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-4}}$　次の 2 次元の単体複体を考える．

$$K = \{|a_1a_2a_3|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_4|, |a_4a_1|, |a_1a_3|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) オイラー標数 $\chi(K)$ を求めよ．
(2) 整係数ホモロジー群 $H_d(K)$ を求めよ．
(3) 球面から異なる 2 点を取り除いた図形を X とする．K が定める多面体 $|K|$ と X は同相でないことを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-5}}$　位相空間 X とその部分集合 A に対して，次のような同値関係を定める：$x, y \in X$ に対し

$$x \sim y \iff x = y \text{ または } \{x, y\} \subset A \tag{1}$$

この同値関係による X の商集合 X/A に，全射 $p : X \to X/A$ が連続となるような最も強い位相 (商位相) を入れる．以下の問いに答えよ．

(1) X/A の商位相を定める開集合族はどのように与えられるか述べ，それが位相の 3 つの条件を満たすことを示せ．
(2) 2 つの円周 S_1, S_2，および，異なる 2 点 $P, Q \in S_1$ を考える．このとき，次の 3 つの空間 X, Y, Z が互いに同相でないことを示せ．

$$X = S_1 \times S_2, \qquad Y = (S_1 \times S_2)/(\{P\} \times S_2), \qquad Z = (S_1/\{P, Q\}) \times S_2 \tag{2}$$

$\boxed{\text{数学 II-6}}$　平面 $\mathbb{R}^2$ から空間 $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto \phi(u, v) \in \mathbb{R}^3$$
$$\varphi(u, v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v)$$

によって曲面 S を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 S の φ に関する第 1 基本量 E, F, G を計算せよ．
(2) 曲面 S の φ に関する第 2 基本量 L, M, N を計算せよ．
(3) 曲面 S のガウス曲率 K，平均曲率 H，主曲率 κ_1, κ_2 を計算せよ．
(4) $\mathbb{R}^2$ の領域 $D = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}$ でパラメータ付けされる曲面 S の部分 $\varphi(D)$ の面積を求めよ．さらにその概形を描け．

$\boxed{\text{数学 II-7}}$　実数 c に対し，

$$M_c = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| {x_1}^2 + {x_2}^2 = c{x_3}^2 + 1\right\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) M_c は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体となることを示せ．
(2) c_1 と c_2 が異符号のとき，M_{c_1} と M_{c_2} は微分同相でないことを示せ．
(3) M_c が M_0 と微分同相となるための c に関する条件を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-8}}$　$p > 1$ とする．区間 $[0,1]$ 上の連続関数の集合 W_p を

$$W_p = \left\{ u \in C([0,1]) \cap C^1((0,1]) \,\middle|\, \begin{array}{c} u \text{ は非負値で } u(0) = 0, \\ |u'(t)|^p \text{ および } \left(\dfrac{u(t)}{t}\right)^p \text{ は } [0,1] \text{ 上で積分可能} \end{array} \right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $u \in W_p$ に対して

$$\int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt = \frac{(u(1))^p}{1-p} - \frac{p}{1-p}\int_0^1 t^{1-p}(u(t))^{p-1}u'(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の $u \in W_p$ に対して不等式

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt \le \int_0^1 |u'(t)|^p\,dt$$

が成り立つことを示せ．

(3) 等式

$$\inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_0^1 |u'(t)|^p\,dt}{\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{u(t)}{t}\right)^p dt} \,\middle|\, u \in W_p, u \not\equiv 0 \right\} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-9}}$ $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $z^4 = -1$ を満たす複素数を全て求めよ．

(2) R を 1 より大きい実数とする．複素平面上で，$z = R$ から原点を中心として反時計回りに円周上を $z = -R$ まで進んでできる半円を C_R，$z = -R$ から実数上を $z = R$ まで進んでできる線分を I_R とおく．次の複素積分の値を求めよ．

$$\int_{C_R + I_R} f(z)\, dz$$

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$ であることを示せ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ の値を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-10}}$ 数列空間

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \middle| a_k \in \mathbb{R}, \|a\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right\}^{1/2} < \infty \right\}$$

の元 $a^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を以下で定める．

$$a^{(n)} = \left(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots \right),$$
$$a_k^{(n)} = \frac{1}{1 + |n-k|} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

また，任意の $a, b \in l^2$ に対して $\langle a, b \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a^{(n)}\| < \infty$ を示せ．

(2) $\displaystyle\inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^{(n)}\| > 0$ を示せ．

(3) 任意の $b \in l^2$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\langle a^{(n)}, b \right\rangle = 0$ となることを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-11}}$ 以下の各問いに答えよ．

(1) 区間 $[0,1]$ 上の実数値可積分関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が全ての n について非負であり，かつ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$$

をみたすとする．このとき，ほとんどすべての $x \in [0,1]$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

となることを示せ．

(2) 区間 $[0,1]$ 上の実数値可積分関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次で定義する：
$n\in\mathbb{N}$ が $n = 2^k + j$ $(j = 0,1,\ldots,2^k-1; k = 0,1,2,\ldots)$ と表されるとき，

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \left(\frac{j}{2^k} \le x < \frac{j+1}{2^k}\text{のとき}\right) \\ 0 & (x\in[0,1]\text{ が上記以外のとき}) \end{cases}$$

このとき，関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = 0$ となることを示せ．

(3) (2) の関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，どのような $0 < x < 1$ に対しても $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は存在しないことを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-12}}$ X は正値確率変数とし，$S(x) = \mathbb{P}(X > x)$ とおく．α は正の定数として，

$$\frac{d}{dx}\log S(x) = -\alpha x^{\alpha-1}, x > 0$$

をみたすとする．以下の問いに答えよ．

(1) X の確率密度関数を求めよ．

(2) $\alpha = 2$ のとき，X の期待値と分散を求めよ．必要なら，ガンマ関数 $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ であることを用いよ．

(3) U は $(0,1)$ 上の一様乱数，すなわち．区間 $(0,1)$ の定義関数を確率密度関数とする確率変数であるとする．このとき

$$Y = \left(\log\frac{1}{1-U}\right)^{1/\alpha}$$

は X と同分布であることを示せ．