平成 27 年度 基礎科目 I 解答

注意

(i) 解答作成には万全を期していますが，論理の飛躍，誤りがあることは有り得ます．

(ii) 本稿はこの著者に著作権があります．

(iii) 無断複製，無断転載は一切禁止します．これらの行為が確認された場合は，止むを得ず法的手段に出ることがあります．

平成 27 年度 基礎科目 I 問 1

次の広義積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{y^2 e^{-xy}}{x^2+y^2}\,dxdy.$$

ここで，$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<y\le x\right\}$ とする．

[解答]

$D=\left\{f(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x=r\cos\theta, r\sin\theta, r>0, 0<\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$ であり，被積分関数は非負だから Tonelli の定理より

$$\iint_D \frac{y^2 e^{-xy}}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^\infty \frac{r^2\sin^2\theta\cdot\exp\left(-r^2\cos\theta\sin\theta\right)}{r^2}\,(rdr)\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\left(\int_0^\infty r\exp\left(-r^2\cos\theta\sin\theta\right)dr\right)d\theta = -\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}\left[\exp\left(-r^2\cos\theta\sin\theta\right)\right]_{r=0}^{r=\infty}d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}(2-1) = -\frac{1}{2}$$

が得られる．∎

平成 **27** 年度 基礎科目 **I** 問 **2**

$\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,\ y) = \frac{4x^2 + (y+2)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

[解答]

明らかに $f(x,y) \geq 0$ であり，$f(0,-2) = 0$ だから最小値は 0 である.

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により，

$$f(x,y) = \frac{4x^2 + y^2 + 4y + 4}{x^2 + y^2 + 1} = 4 + \frac{-3y^2 + 4y}{x^2 + y^2 + 1} = 4 + \frac{-3r^2\sin^2\theta + 4r\sin\theta}{r^2 + 1} \xrightarrow{r \to \infty} 4 - 3\sin^2\theta$$

だから，ある $R > 0$ が存在して，$x^2 + y^2 \geq R^2$ を満たすところでは $f(x,y) \leq 9/2$ をみたす．とくに $x^2 + y^2 = R^2$ なるところで $f(x,y) \leq 9/2$ をみたす.

f の停留点を求める.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{8x(x^2+y^2+1) - 2x(4x^2+y^2+4y+4)}{(x^2+y^2+1)^2} \\
&= \frac{2x(4x^2+4y^2+4) - 2x(4x^2+y^2+4y+4)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2x(3y^2-4y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2xy(3y-4)}{(x^2+y^2+1)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,) &= \frac{2(y+2)(x^2+y^2+1) - 2y(4x^2+y^2+4y+4)}{(x^2+y^2+1)^2} \\
&= \frac{2(x^2y + 2x^2 + y^3 + 2y^2 + y + 2) - 2(4x^2y + y^3 + 4y^2 + 4y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2(-3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - 3y + 2)}{(x^2+y^2+1)^2}
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy(3y-4) = 0 \\ -3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - 3y + 2 = 0 \ldots (1) \end{cases}$$

である.

[1]　$x = 0$ のとき，

$$((1)\text{ の左辺}) = -2y^2 - 3y + 2 = -(2y-1)(y+2)$$

だから，$(1) \iff y = 1/2, -2$ である.

[2]　$y = 0$ のとき，

$$((1)\text{ の左辺}) = 2x^2 + 2 > 0$$

だから，(1) をみたし得ない.

[3]　$y = 4/3$ のとき，

$$((1)\text{ の左辺}) = -4x^2 + 2x^2 - \frac{32}{9} - 4 + 2 = -2x^2 - \frac{32}{9} - 2 < 0$$

だから，(1) をみたし得ない.

よって，f の停留点は $(0, 1/2)$, $(0,-2)$ である．$f(0,1/2) = 5, f(0,-2) = 0$ である．コンパクト集合 $D_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$ 上で f は連続だから，f は D 上で最大値をとる．最大点は境界 ∂D または停留点であるが，以上の議論から D 上の最大点は $(0, -1/2)$ で最大値は 5 である．また，$D^c \cup \partial D$ での f の値は 5 未満である．したがって，f の最大値は 5 である.

f は $\mathbb{R}^2$ 上で連続でだったから，f のとりうる値の範囲は 0 以上 5 以下である．∎

[別解]

明らかに $f(x,y) \geq 0$ であり，$f(0,-2) = 0$ だから最小値は 0 である．また，

$$f(x,y) = 5 + \frac{-x^2 - 4y^2 + 4y - 1}{x^2 + y^2 + 1} = 5 - \frac{x^2 + (2y+1)^2}{x^2 + y^2 + 1} \leq 5$$

であり，$f(0,-1/2) = 5$ だから最大値は 5 である．∎

平成 **27** 年度 基礎科目 **I** 問 **3**

a, b を複素数とする．3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ b & 2 & 0 \\ -b & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(i) 行列 A の固有値を求めよ.

(ii) 行列 A と行列 B が相似となるような複素数 a, b をすべて求めよ．ただし，A と B が相似であるとは，複素正則行列 P で $A = P^{-1}BP$ をみたすものが存在することをいう.

[解答]

(i)　I を 3 次単位行列とする.

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -a & -a \\ -b & x-2 & 0 \\ b & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \{(x-2)^3 + 0 + 0\} - \{-ab(x-2) + ab(x-2)\} = (x-2)^3$$

であるから，A の固有値は 2 である．■

(ii)　A, B が相似であることと，A, B の Jordan 標準形が一致することは同値である．B の Jordan 標準形は $J_2(2) \oplus J_1(2)$ だから,

$$\begin{aligned}
\text{A,B が相似} &\iff \big(\mathrm{rank}(2I - A) = 1 \quad \wedge \quad \mathrm{rank}(2I - A)^2 = 0\big) \\
&\iff \left(\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \wedge \quad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & ab \\ 0 & -ab & -ab \end{bmatrix} = 0\right) \\
&\iff \left(\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & ab \\ 0 & -ab & -ab \end{bmatrix} = O\right) \\
&\iff (ab = 0 \quad \wedge \quad (a,\ b) \neq (0,\ 0))
\end{aligned}$$

である．したがって，$ab = 0$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$ をみたす組 (a, b) が求めるものである．■

平成 **27** 年度 基礎科目 **I** 問 **4**

a, b, c, d を複素数とする．次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 & -6 & a \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$

[解答]

基本変形により，

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 & -6 & a \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 10 & a+2b \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 & b+d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 10 & a+2b \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 14 & b+c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & a+2b-(b+d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b+c-2(b+d) \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 & b+d \end{pmatrix}$$

だから，階数は

$$\begin{cases} 3 & (c = b+d \text{ のとき}) \\ 4 & (c \neq b+d \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．∎